Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2005.

Fase Estatál. Yucatán.

Problemario.

8 de marzo de 2005

Problemas

1 Hubo un robo en la joyería Factorial. Los dos sospechosos son los empleados de la joyería: Combinado y Permutado. Ellos son los únicos que conocen la clave de la caja de seguridad (la cual consta de tres números naturales). De los dos, uno siempre dice la verdad y el otro siempre miente. El inspector Truquini los interroga y ellos responden: Yucatán 2000.

Combinado. "Yo no fui."
Permutado. "Si al primer número de la clave se le resta el segundo, se obtiene lo mismo que si al segundo se le resta el tercero. Además, si multiplico los tres números, el resultado es 2001."

¿Quién es el ladrón?

2 Demuestra que el producto de tres números consecutivos siempre es divisible entre 6.

3 Si a y b son impares, muestra que $a^2 + b^2$ no puede ser cuadrado perfecto.

Yucatán 1994.

4 Si $2^a + 2^b = 2^c$, pruebe que $a = b$.

5 Si $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{m}\right) = 1$, entonces ¿cuánto vale m? (la respuesta puede incluir a n, por ejemplo $2n - 1$).

6 ¿Cuántas parejas de enteros positivos impares tienen como suma 1998?

7 Un tablero de ajedrez está numerado en cada una de sus casillas en el sentido convencional, (del 1 al 8 en la primera fila, del 9 al 16 en la segunda fila, etc.,hasta llegar al 64 en la casilla inferior derecha). Se sitúan sobre el tablero 8 torres, de manera que ninguna de ellas sea capaz de capturar a otra. ¿Cuánto suman los números de las casillas donde se ubican las torres?, ¿Es siempre la misma suma? ¿por qué? (La torre captura cualquier ficha que se encuentra en la misma fila o columna de ella)

8 ¿Cuáles son los últimos dos dígitos de 7^{2004}?

9 ¿Cuál es el dígito de las unidades de $(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots+(2004^2+2004)$?

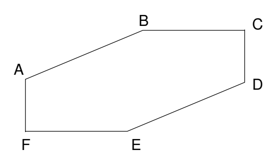
10 ¿De cuántas maneras se puede escoger en el tablero de ajedrez una casilla blanca y una negra que no estén los dos en una misma fila ni en una misma columna?

11 Pedro invitó a 20 amigos y 20 amigas a una fiesta. Todos se sentaron en una mesa redonda y entonces cada muchacho le da un regalo a cada muchacha que le haya quedado a su lado (si sólo hay una, sólo da un regalo y si está entre dos muchachos no da regalo). Prueba que el número total de regalos repartidos es par. Yucatán 2001.

12 ¿Cuántos enteros existen del 1 al 900 que no se dividen ni por 2 ni por 3?

13 Encuentra el número más pequeño tal que el producto de sus dígitos es 2000.

14 Si $ABCDEF$ es un hexágono donde los lados opuestos son iguales y paralelos, demuestra que el área del triángulo ACE es la mitad del área del hexágono.



15 ¿Cuántos números hay entre 1000^2 y 999^2 sin incluir estos dos números?

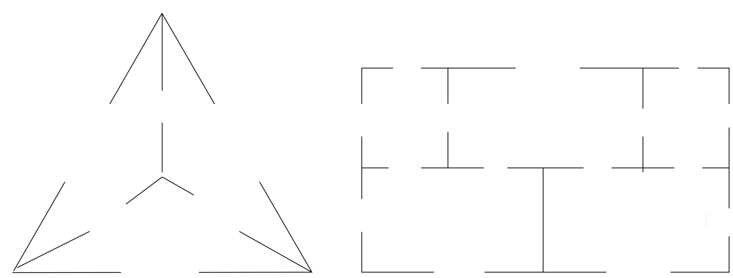
16 A la suma de los primeros 2004 números pares se le resta la suma de los primeros 2004 números impares. ¿Cuál es el resultado?

17 Un caminante realiza el siguiente experimento: en el primer minuto camina a 1 km/h, en el segundo minuto camina a 2 km/h, el tercero a 3 km/h, y así sucesivamente. ¿A qué velocidad estará caminando cuando haya recorrido 1000 metros?

18 La suma de tres enteros es 42. El segundo número es cuatro veces el primero y el tercero es el triple del cuadrado del primero. Encontrar esos tres números.

Yucatán 1999.

19 A continuación se te muestran los mapas de 2 casas, indicando en cada uno la posición de las puertas. Encuentra, para cada mapa, un camino que pase por todas las puertas exactamente una vez. Si en alguno de los dos no existe tal camino, explicar la razón.



20 Andrea, en sus tres primeros exámenes sacó 7, 8 y 10. ¿Cuánto debe sacar en el último examen para alcanzar promedio de 8?

21 Drini, según la receta de su médico, debe tomar todo el contenido de un frasco de píldoras en 4 días de la siguiente manera: el primer día, la mitad del total; el segundo día, un tercio de lo que queda; el tercer día, un cuarto de lo que queda y el cuarto día 6 píldoras. ¿Cuántas píldoras había originalmente en el frasco?

Yucatán 1993.

22 Consideremos un triángulo en el que uno de sus catetos vale 10. A este cateto se trazan 5 paralelas desde la hipotenusa al otro cateto, de modo que la distancia entre cada paralela sea la misma. Calcular la suma de las longitudes de las 5 paralelas y el cateto.

Yucatán 1994.

23 ¿Habrá alguna manera de acomodar los signos $+$ y $-$ en los espacios $\_$ de modo que se cumpla $1 \_ 2 \_ 3 \_ 4 \_ \cdots \_ 100 = 13^2$?

24 Los boletos para entrar a la Disco Nexa cuestan \$8 para los muchachas y \$10 para los muchachos. Si el precio de los boletos fuera al revés, la suma de lo que pagaron todos los que entraron a la disco sería \$6 menos de lo que en realidad fue. Si asistieron 30 muchachas, ¿Cuántos muchachos asistieron?

25 En una fiesta los asistentes se saludaron entre sí. Alguien notó que el total de saludos fue 28. ¿Cuántas personas asistieron?.

Yucatán 1993.

26 Un piso cuadrado es cubierto por azulejos cuadrados congruentes entre sí. Los azulejos de las dos diagonales del piso son negros. Los azulejos restantes son blancos. Si hay 101 azulejos negros, entonces ¿Cuál es el número de azulejos blancos?

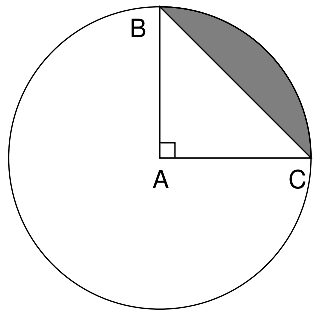
Yucatán 1994.

27 Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2001}$ son números $1, 2, 3, \ldots, 2001$ pero en diferente orden. Explica porqué sin importar cuál es este orden, el producto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_{2001} - 2001)$$

siempre es un número par.

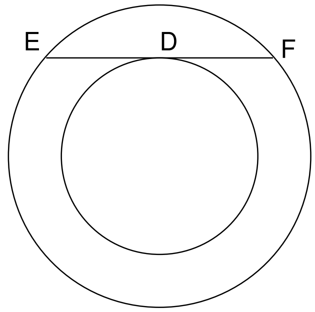
28 Si el círculo tiene radio 4 y A es el centro, calcular el área sombreada.



29 Dado un triángulo ABC, donde a es la longitud de BC, b es la longitud de CA, c es la longitud de AB, y r el radio del círculo inscrito, demostrar que el área del triángulo es igual a

$$r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

30 En la figura se tienen dos círculos concéntricos. El grande tiene radio R y el chico r. El segmento EF es tangente al círculo pequeño. ¿Cuánto mide EF?



31 Un conejo da 5 saltos mientras que un perro que lo persigue da 4, pero 8 saltos del perro equivalen a 11 saltos del conejo (en distancia). Si el conejo le lleva 66 saltos de ventaja, ¿Cuántos saltos ha de dar el perro para alcanzar al conejo?

32 Mis vecinos suelen tener reuniones los fines de semana y no me dejan dormir. El pasado viernes, conté 21 choques de copas (todos brindan con todos). El sábado, pese a mi reclamo, hubo otra reunión. Después de brindar entre todos, un invitado se marchó y luego brindaron nuevamente. Conté seis choques de copas menos que la primera vez esa noche. El domingo por la mañana les hice una invitación sugiriendo que no tuvieran reunión esa noche, diciéndoles que beber no es bueno para la salud. Esa noche hubo una tormentosa reunión y esta vez no hubo brindis, solo saludos. Conté 21 choques de manos (entre dos varones) y 34 besos (entre varón y mujer o entre dos mujeres). Me dijeron que si les digo cuántas personas hubo en cada reunión me dejarían dormir todo un fin de semana en paz. ¿Cuántos invitados hubo en las tres reuniones? ¿Me pueden ayudar?

33 Estamos situados en un tablero de ajedrez. Un caballo se encuentra situado en la esquina inferior izquierda y debe ser llevado hasta la esquina superior derecha del tablero pasando por todas las casillas restantes del tablero exactamente una vez. ¿Es posible hacer esto? (Un caballo se mueve en forma de L, es decir, dos casillas en un sentido hacia arriba, abajo, izquierda o derecha y luego una casilla en sentido perpendicular)

34 La suma de las cifras de un número $10^N - a$ es 2004. Si a es un dígito, ¿Cuánto vale n?

35 En el plano se encuentran 10 conjuntos de rectas $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{10}$ de manera que el conjunto A_n tiene n rectas. Las rectas de cada uno de los diez conjuntos son paralelos entre sí pero no son paralelas a las de ninguno de las de los demás conjuntos. Además entre todas las rectas no hay tres concurrentes (es decir, no hay 3 rectas que pasen por un mismo punto). Calcula el número de puntos de intersección que tiene la colección de las rectas Michoacán

Soluciones.

1 Analicemos lo que dice Permutado. Si fuera verdad, la combinación serían tres números en progresión aritmética (es decir, números de la forma $n-k, n, n+k$). Además su producto sería 2001. Pero si factorizamos 2001 obtenemos $3 \cdot 23 \cdot 29$, con los que no se puede formar una progresión aritmética.

Entonces lo que dice Permutado NO puede ser verdad, o sea que Permutado miente y Combinado dice la verdad. Por tanto Permutado es el ladrón.

2 Para que un número sea divisible entre 6, debe serlo entre 3 y entre 2. Además, si se toman 3 números consecutivos, siempre hay un múltiplo de 3 y un múltiplo de 2, por lo que si multiplicamos los 3, obtenemos un múltiplo de 6.

3 Si a y b son impares, $a^2 + b^2$ es par, y si fuera cuadrado perfecto debería ser múltiplo de 4 (como es cuadrado debe de contener dos veces el factor 2). Como a y b son impares, $a = 2x+1$ y $b = 2y+1$ para enteros x, y. Elevando al cuadrado y sumando vemos que $a^2 + b^2 = 2(2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 1)$ no es múltiplo de 4.

4 Si $a \neq b$ entonces $a < b$ o $a > b$. Cuando $a < b$ tenemos que $2^a + 2^b = 2^a\left(1 + 2^{b-a}\right)$ y $2^c = 2^a\left(2^{c-a}\right)$. Cancelamos a ambos lados 2^a y nos queda $1+2^{b-a} = 2^{c-a}$. El lado izquierdo de esa ecuación es un número impar mientras que el lado derecho es un número par. Esto es imposible y por tanto no puede pasar que $a < b$. Cuando $b > a$ aplicamos un argumento similar.

5 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right) = 1$. Para que todo se cancele, necesitamos que $m = n + 1$ y ésa es la respuesta.

6 Como $\frac{1998}{2} = 999$, hay un entero que es menor que 1000. de estos hay 500 impares, y a cada impar n se le asocia el impar $1998 - n$, formando así 500 parejas .

7 La numeración de las casillas tiene la siguiente estructura:

1	2	3	4	5	6	7	8
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8
1+16	2+16	3+16	4+16	5+16	6+16	7+16	8+16
1+24	2+24	3+24	4+24	5+24	6+24	7+24	8+24
1+32	2+32	3+32	4+32	5+32	6+32	7+32	8+32
1+40	2+40	3+40	4+40	5+40	6+40	7+40	8+40
1+48	2+48	3+48	4+48	5+48	6+48	7+48	8+48
1+56	2+56	3+56	4+56	5+56	6+56	7+56	8+56

entonces vemos que dado que sólo hay una torre en cada columna, una parte de la suma total es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, y como cada torre está en una única fila, el resto de la suma total es $0 + 8 + 2{\cdot}8 + 3{\cdot}8 + \cdots + 7{\cdot}8 = 8(1 + 2 + 3 + \cdots + 7) = 8{\cdot}28$. Así la suma total siempre es $36 + 8{\cdot}28 = 260$.

8 Consideremos las potencias de 7:

$$\begin{array}{rcl}
7^1 & = & \mathbf{7} \\
7^2 & = & \mathbf{49} \\
7^3 & = & 3\mathbf{43} \\
7^4 & = & 24\mathbf{01} \\
7^5 & = & 168\mathbf{07} \\
7^6 & = & 1176\mathbf{49} \\
7^7 & = & 8235\mathbf{43} \\
7^8 & = & 57648\mathbf{01} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

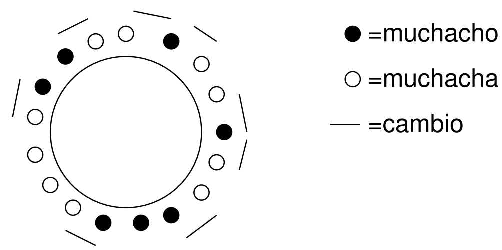
vemos que cada 4 potencias la terminación se repite y que cuando el exponente es múltiplo de 4 la terminación es 01. Entonces 7^{2004} termina en 01.

9 Calculamos el último dígito de (1^2+1), de (2^2+2), de (3^2+3), etc. y después de unos cuantos, notamos que los últimos dígitos se repiten cada 5 números.El último dígito de la suma en cada grupo es 0. Entonces la suma hasta 2000 es igual a 0 (porque son 400 grupos de cinco números). Así, la suma hasta 2004 tiene el mismo último dígito que $(1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4)$, es decir, 0.

10 Para tomar la casilla blanca hay 32 opciones. Dado que al escoger ésta quedan 4 casillas del otro color en su misma vertical y 4 en su misma horizontal, para escoger la negra sólo tenemos $32 - 8 = 24$ opciones. Por tanto la respuesta es de $32 \times 24 = 768$ maneras.

11 Escojamos a cualquier muchacho y a partir de él empecemos a recorrer todos los asientos hacia la derecha. Cada vez que después de un muchacho sigue una muchacha se da regalo, cada vez que una muchacha va antes de un muchacho también se da regalo. Además cuando después de un muchacho sigue un muchacho no se da regalo, y de manera similar cuando son dos muchachas. Lo que estamos diciendo es que al pasar por los asientos avanzando a la derecha, hay un regalo por cada cambio muchacha/muchacho y muchacho/muchacha. Como comenzamos con muchacho y terminamos con muchacho (ya que la mesa es circular terminamos con el muchacho con que iniciamos) hubo un número par de cambios y por tanto un número par de regalos.

Es interesante notar que la cantidad de muchachas y muchachos no importa, ya que siempre el número de cambios es par. Por ejemplo, el siguiente diagrama muestra la situación con 7 muchachos y 10 muchachas.



Otra forma de ver la solución es considerar “grupos” de muchachos que están juntos, y ver que por cada grupo de muchachos se dan dos regalos (uno en cada extremo).

12 La cantidad de números pares es $900/2 = 450$, y la cantidad de múltiplos de 3 es $900/3 = 300$. Sin embargo, $900 - 450 - 300$ no es la respuesta correcta, ya que números como el 18 que son divisibles tanto entre 2 como entre 3 están siendo quitados dos veces (es decir, repetimos los múltiplos de 6). De estos hay $900/6 = 150$ que debemos aumentar una vez. Entonces la respuesta final es $900 - 450 - 300 + 150 = 300$.

13 Si factorizamos 2000 obtenemos $2^4 \times 5^3$. Entonces el número más pequeño combinando esos factores es 25558.

14 Trácese por F una paralela a AB, por B una paralela a CD y por D una paralela a EF. Estas 3 líneas se van a cortar en el centro P del hexágono y se van a formar 3 paralelogramos: $ABPF$, $BCDP$ y $DEFP$. El triángulo FPB es el mismo que el FAB, el BPD es el congruente al BCD y el triángulo FPD es igual al DEF. Entonces el área del hexágono es el doble que la del triángulo ACE.

15 Si incluyéramos 1000^2 pero no 999^2 la respuesta sería $1000^2 - 999^2$, pero como no incluimos 1000^2 tenemos que restar 1 a el número obtenido. Por otra parte $1000^2 - 999^2 = (1000 + 999)(1000 - 999) = (1999)(1)$. Así, la respuesta final es $1999 - 1 = 1998$.

16 $(2+4+6+\cdots+4008)-(1+3+5+\cdots+4007) = (2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(4008-4007) = 2004$.

17 Notemos que en el minuto n el caminante recorre $n/60$ kilómetros y que 1000 metros son 1 kilómetro. Entonces queremos hallar el mayor n tal que

$$\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}+\cdots+\frac{n}{60} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{60} < 1$$

ya que al minuto siguiente ya habrá recorrido más de 1 kilómetro. Pero la ecuación anterior es equivalente a $1+2+3+\cdots+n < 60$. Al hacer algunos cálculos notamos que si $n = 10$ la suma es 55 y si $n = 11$ la suma es 66. Así, el caminante alcanza 1000 metros en el minuto 11 y por tanto su velocidad es de 11 km/h.

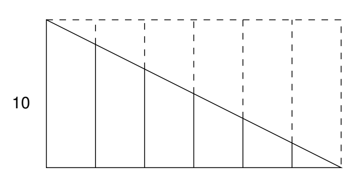
18 Llamemos por x al primer número. Entonces el segundo es $4x$ y el tercero es $3x^2$. Como la suma es 42 obtenemos la ecuación $3x^4 + 4x + x = 42$, lo que se convierte en $3x^2 + 5x - 42 = 0$. Esa es una ecuación de segundo grado que podemos resolver por la fórmula cuadrática y obtenemos dos soluciones: $x = -14/3$ y $x = 3$. La primera solución no nos sirve porque nos piden números enteros, entonces los números pedidos son $x = 3$, $4x = 12$ y $3x^2 = 27$.

19 Notemos que si un cuarto tiene un número impar de puertas es imposible empezar afuera de ese cuarto y terminar afuera, así como tampoco se puede empezar adentro y terminar adentro. Esto significa que si se pudiera hacer el recorrido cada cuarto con un número impar de puertas tendría un extremo del camino. Pero en ambos casos, hay más de 2 cuartos con un número impar de puertas, y dado que un recorrido sólo tiene 2 extremos, concluimos que no existen los caminos que se nos piden.

20 Si x es la calificación que necesita alcanzar, entonces se debe cumplir que $8 = \dfrac{7+8+10+x}{4} = \dfrac{25+x}{4}$. Esta ecuación se simplifica en $25 + x = 32$ de donde obtenemos $x = 7$. Por tanto, Andrea debe sacar al menos 7 para alcanzar el promedio deseado.

21 Si x es el número de píldoras, el primer día se toma la mitad $(x/2)$ y le queda otra mitad $(x/2)$. El segundo día se toma un tercio de lo que sobra. Dado que un tercio de un medio es $\frac{x/2}{3} = \frac{x}{6}$, de la mitad que tenía ahora sólo le quedan $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{6} = \dfrac{3x - x}{6} = \dfrac{2x}{6} = \dfrac{x}{3}$. En el tercer día se toma un cuarto de las que le quedan, es decir, se toma $\frac{x/3}{4} = \frac{x}{12}$. El número de píldoras que le quedan ahora es $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{12} = \dfrac{4x - x}{12} = \dfrac{3x}{12} = \dfrac{x}{4}$. Además nos dicen que este resto son las 6 píldoras que se tomó el último día. Como $\frac{x}{4} = 6$, llegamos a la solución $x = 24$.

22 Acompletemos el dibujo como se muestra, y notamos que la suma que buscamos es la mitad de la suma de todas las líneas verticales. Por otro lado, todas las líneas verticales miden 10, por lo que la suma total es 60 y así la respuesta es 30.



23 Consideremos primero la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$. Esa suma es par (se calcula con la fórmula $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$ y es igual a 5050). Ahora notemos que cada vez que cambiamos un signo $+$ por un $-$, el resultado total sigue siendo par. Así, es imposible llenar los espacios para obtener 13^2 ya que éste es un número impar.

24 Sea x el número de muchachas y y el número de muchachos. Entonces la suma total es $k = 8x + 10y$. Además $k - 6 = 10x + 8y$. Para resolver este sistema de ecuaciones, a la primera ecuación le restamos la segunda y nos queda $6 = -2x + 2y$, es decir, $y - x = 3$. Como $x = 30$, llegamos a que $y = 33$.

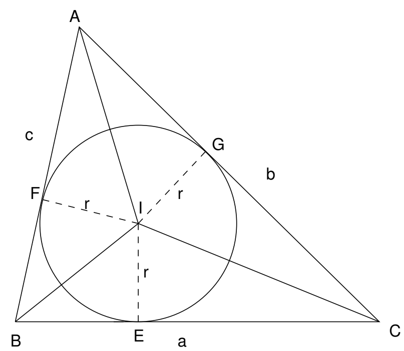
25 Llamemos n al número de personas. Cada persona saluda a las $n - 1$ restantes, por lo que podríamos decir que el total de saludos es $n(n - 1)$. Sin embargo, esto es un error ya que cada saludo lo estamos contando 2 veces, una para cada persona en el saludo. Entonces la verdadera cantidad de saludos es $\dfrac{n(n-1)}{2} = 28$. Haciendo las simplificaciones necesarias obtenemos la ecuación $n^2 - n - 56 = 0$. Las raíces de la ecuación son $n = -7$ y $n = 8$. Pero es imposible que en la fiesta hubiera un número negativo de personas. Por tanto, en la fiesta asistieron 8 personas.

26 Si n es el número de azulejos en un lado del piso, el total de azulejos es n^2, y el número de azulejos en las dos diagonales es $2n - 1$. Como $2n - 1 = 101$ resolvemos la ecuación y obtenemos $n = 51$ y ya podemos calcular el número de azulejos blancos que es $n^2 - (2n - 1) = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 = 50^2 = 2500$.

27 Para que el producto sea impar, se necesita que cada $(a_r - r)$ sea un número impar. Para que esto suceda, a_r tiene que ser impar mientras que r es par, o al revés. Esto se puede hacer si hay el mismo número de pares que de impares, pero en $1, 2, 3, \ldots, 2001$ hay 1000 números pares y 1001 números impares lo que significa que algún $(a_r - r)$ es par y por tanto el producto también.

28 El área del círculo es πr^2. Como $r = 4$ obtenemos que el área es 16π. La cuarta parte del área es 4π y a eso le tenemos que restar el área del triángulo para obtener la parte sombreada. El triángulo es rectángulo por lo que su área será $4 \times 4/2 = 8$. Así, el área sombreada es $4\pi - 8 = 4(\pi - 2)$.

29 Como los lados son tangentes al círculo y las tangentes son perpendiculares a las líneas que unen el centro con el punto de tangencia, tenemos que $EI \perp BC$ (es decir, EI es altura del triángulo BIC). Entonces el área del triángulo BIC es $BI \times EC/2 = ar/2$. De manera similar, el área del triángulo CIA es $br/2$ y la del AIB es $cr/2$. Al sumarlas todas llegamos a que el área del triángulo ABC es igual a $\dfrac{ar}{2} + \dfrac{br}{2} + \dfrac{br}{2} = \dfrac{ar + br + cr}{2} = r\left(\dfrac{a + b + c}{2}\right)$



30 Si dibujamos el triángulo ADE (donde A es el centro de los dos círculos) vemos que es rectángulo y al aplicar el Teorema de Pitágoras obtenemos $DE = \sqrt{R^2 - r^2}$. Entonces $EF = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

31 El perro da 4 saltos mientras que el conejo da 5 saltos, es decir, el perro da 8 saltos mientras que el conejo da 10 saltos, pero los 8 saltos que da el perro equivalen a 11 saltos del conejo (en distancia), es decir, cada vez que el conejo da 10 saltos, el perro recorre una distancia equivalente a 11 saltos. Esto determina que cada vez que el perro da 8 saltos, la distancia entre éste y el conejo disminuye en un salto de conejo. Entonces el perro alcanzará al conejo después de 66 de éstas repeticiones. Por lo tanto, lo alcanzará después de $66 \times 8 = 528$ saltos.

32 El viernes hubo 21 saludos. Los choques los podemos contar de la siguiente manera. Si habían x personas, podemos escoger a cualquiera de éstas y brindará con el resto, es decir $x - 1$ personas. Contando de esta forma todos los brindis vemos que hay $x(x - 1)$ brindis, pero como los brindis son recíprocos estamos contando 2 veces cada brindis. Por lo tanto, tenemos que dividir entre 2 el total de brindis y obtenemos la fórmula:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 21$$

y esto da como resultado $x = 7$.

El sábado es fácil determinar el número de invitados pues como se fue un invitado se escucharon 6 saludos menos que son los que dio éste al resto de los invitados, lo que quiere decir que eran en total 7.

El domingo es un poco más complicado. Los saludos entre los varones los podemos contar de la misma manera en la que contamos los brindis. Entonces sabemos que había 7 varones entre los invitados. Si x es el número desconocido de mujeres; puesto que 7 varones saludan de beso a las mujeres, tenemos $7x$ saludos; y como entre las mujeres se saludan de beso (esto se cuenta de la misma forma que contamos los brindis), es decir, hay $\frac{x(x-1)}{2}$ saludos, entonces tenemos:

$$7x + \frac{x(x-1)}{2} = 34$$

Al resolver esta ecuación, obtendremos $x = 4$. Así, habían 7 varones y 4 mujeres en la reunión del domingo.

33 La casilla donde se ubica el caballo y la casilla a la cual desea llegar al final de los movimientos tienen el mismo color. En cada movimiento el caballo cae en una casilla con distinto color al de la casilla en la que se encontraba. Por lo tanto, con un número par de movimientos cae en una casilla del mismo color al de la casilla inicial y con un número impar de movimientos cae en una casilla de diferente color al de la inicial. En este caso, debe de recorrer 63 casillas en total (no se cuenta la casilla en la que se comienza). Por lo tanto si debe de realizar 63 movimientos, debe caer al final en una casilla de color contario al de la casilla en que comenzó, y la casilla en la que se quiere terminar tiene el mismo color. Con esto concluimos que no es posible.

34 Las cifras del número $10^N - a$ son una secuencia de $N-1$ nueves, y algún dígito posiblemente distinto en la última posición (porque a es dígito). Dividiendo 2004 entre 9 podemos ver que

$$2004 = 222(9) + 6$$

esto es, necesitamos 222 nueves y un 6 para sumar 2004 así que, como hay un dígito de más, $N = 223$ y $a = 4$.

35 Contemos las intersecciones de las rectas de cada conjunto con las de los conjuntos con menos rectas: Cada recta de A_2, se intersecta con la recta de A_1, dando un total de 2 intersecciones; cada una de las 3 rectas de A_3 se intersecta con las rectas de A_2 y A_1, dando un total de $3(1 + 2)$ puntos de intersección; análogamente, las 4 rectas del conjunto A_4 se intersectan con las rectas de A_3, A_2 y A_1, dando un total de $4(1 + 2 + 3)$ puntos de intersección; y así con los otros conjuntos. En total hay

$$2 + 3(1 + 2) + 4(1 + 2 + 3) + \cdots + 10(1 + 2 + 3 + \cdots + 9)$$

puntos de intersección.