Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen Estatal de Yucatán 2004

Primer día
7 de mayo de 2004

Problema 1
Encuentra todos los números naturales N de tres dígitos tales que al dividir N entre 11 el resultado sea igual a la suma de sus dígitos.

Solución
Como N es de tres dígitos, entonces N se puede expresar como $100a + 10b + c$, donde a, b y c son dígitos (del 0 al 9); por ejemplo, si N fuera 145, entonces $N = (100 \times 1) + (10 \times 4) + 5$. Entonces queremos en realidad hallar los valores de a, b y c de lo siguiente: $\frac{100a+10b+c}{11} = a + b + c$; pero esto pasa sólo si pasa esto: $100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$, y a su vez equivale a: $89a = b + 10c$, luego hay que hallar todos los valores de a, b y c que cumplan esta ecuación: $89a = b + 10c$. $a \neq 0$ puesto que pidieron a N de tres cifras, y si a fuera 0 entonces N sería de dos cifras nada más. Ahora digamos que $a = 2$, entonces la parte izquierda de la ecuación valdría 178, pero la parte derecha es a lo más 99 (cuando $b = c = 9$); entonces no se valdría la ecuación, y esto ocurre para valores de a mayores a 2 también; luego $a = 1$. Ahora hallemos todos los valores de b y c de $89 = b + 10c$, y lo podemos hacer así:
Si $b = 0$ entonces $c = \frac{89}{10}$ =8.9 que no es entero,
si $b = 1$ entonces c =8.8, tampoco,
si $b = 2$ entonces c =8.7, tampoco,
si $b = 3$ entonces c =8.6, tampoco,
si $b = 4$ entonces c =8.5, tampoco,
si $b = 5$ entonces c =8.4, tampoco,
si $b = 6$ entonces c =8.3, tampoco,
si $b = 7$ entonces c =8.2, tampoco,
si $b = 8$ entonces c =8.1, tampoco,
si $b = 9$ entonces c =8, ¡sí dio entero!;
Lo hicimos de $b = 0$ hasta 9 puesto que b es un dígito y son los únicos casos. Por tanto el único natural N que cumple con las condiciones es 198. $\square$

Problema 2
El mago Merlín reparte monedas de oro a los 1002 caballeros que están sentados alrededor de la gran mesa redonda de la siguiente manera: al primer caballero le da dos monedas, al segundo caballero (que está sentado a la izquierda del primero) le da cuatro monedas, al tercer caballero (que está a la izquierda del segundo) le da seis, así sucesivamente hasta llegar al último caballero que recibe 2004 monedas de oro. Como Merlín es justo, levanta su varita mágica y la mitad de las monedas que tiene cada caballero son transportadas al caballero de su izquierda. Si algún caballero no tiene un número par de monedas, Merlín le añade una. Merlín afirma: si repito este proceso muchas veces, llegará un momento en que todos ustedes tendrán el mismo número de monedas. ¿Es cierto lo que dice Merlín? Explica tu respuesta.

Solución
Sí es cierto lo que dice Merlín. Al levantar su varita por primera vez únicamente el primer caballero aumenta de monedas; los demás caballeros no aumentan, ya que si un caballero tiene n monedas, entonces el de su derecha tiene $n - 2$ monedas, entonces el caballero recibe $\frac{n-2}{2}$ monedas y da $\frac{n}{2}$ monedas, entonces va a tener $\frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n-2+n}{2} = n - 1$, pero como n era par, entonces

$n-1$ es impar y luego merlín le añade una moneda más, y entonces se queda con n monedas que eran las que tenía antes. Puesto que las monedas del caballero 1002 no cambian (2004 monedas) entonces las monedas del primer caballero van a llegar a 2004 por lo siguiente: si b son las monedas del caballero 1002, y a son las del primer caballero, entonces el primer caballero va a tener $\frac{b+a}{2}$ monedas y esta cantidad nunca sobrepasa b, ya que si $b \geq a$ entonces $b+b \geq b+a$, luego $\frac{b+b}{2} \geq \frac{b+a}{2}$, por tanto $b \geq \frac{b+a}{2}$, pero esas cantidades sí crecen: si $b \geq a$, entonces $b+a \geq a+a$, luego $\frac{b+a}{2} \geq a$, entonces como va siempre creciendo y nunca va a sobrepasar a 2004 entonces va a llegar a tener el primer caballero 2004 monedas. Al segundo caballero le va a pasar lo mismo (va a tener las mismas condiciones que el primer caballero, sólo cambia la cantidad a) y sucesivamente a todos los caballeros también, por lo tanto todos van a tener en algún momento 2004 monedas y por tanto Merlín tenía razón. $\square$

Problema 3

Se inscribe un hexágono regular $ABCDEF$ en una circunferencia (los vértices nombrados en el sentido de las manecillas del reloj). Sea Q el punto de intersección de l_1 y l_2, las tangentes a la circunferencia por A y C, respectivamente. Sea P la intersección de l_1 con la prolongación del segmento DB y sea R la intersección de l_2 con la prolongación del segmento FB. Si el área del hexágono es 2004, halla el área del cuadrilátero $PQRB$.

Solución

Sea O el centro de la circunferencia. Notemos que $\measuredangle PAB = \measuredangle FBA$ pues l_1 es tangente y el arco AB es igual al arco FA; con esto concluimos que $l_1 \parallel FB$. Análogamente se prueba que $\measuredangle BCR = \measuredangle DBC$ y se concluye que $l_2 \parallel DB$. Por lo tanto $PQRB$ es un paralelogramo. Es claro que $AC \perp FB$. Además $\triangle AOQ \cong \triangle COQ$, asi $\measuredangle AQB = \measuredangle CQB$, por lo cual BQ está en la altura, es decir, como la altura es perpendicular a AC se concluye que E, B y Q son colineales. como $\triangle OAB$ es equilátero entonces $\measuredangle BAQ = 30^\circ = \measuredangle BQA$, por tanto $\triangle ABQ$ es isósceles, así $AB = BQ$. Trácese EC, es claro que $EC \parallel FB$, pues $\measuredangle FBE = \measuredangle BEC$. Sea T el punto de intersección de EC con DB. $\measuredangle DTC = \measuredangle BPQ$ pues $EC \parallel l_1$ y más aun $\measuredangle ECD = 30^\circ = \measuredangle AQB$ por lo cual $\triangle DTC \sim \triangle BPQ$. Como $DC = AB = BQ$, entonces $\triangle DTC \cong \triangle BPQ$, así $area(DTC) = area(BPQ)$, pero $area(DTC) = \frac{1}{3}area(DOC)$, como $area(DOC) = \frac{1}{6}area(ABCDEF)$, entonces $area(DTC) = \frac{1}{18}area(ABCDEF)$. Como $area(PQRB) = 2(area(BPQ)) = 2(area(DTC)) = \frac{2}{18}area(ABCDEF) = \frac{1}{9}area(ABCDEF) = \frac{2004}{9}$. Así el área buscada es $\frac{2004}{9}$. $\square$

Problema 4

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ un subconjunto de diez elementos de los primeros cien números naturales, tales que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$. Para cada uno de los subconjuntos de A con siete elementos se selecciona el número más grande. Definimos "el peso de A" como la suma de todos estos números seleccionamos. Demuestra que dentro de todos los posibles conjuntos A, el mayor de los pesos que se puedan obtener menos el menor de los pesos que se puedan obtener es múltiplo de 90.

Solución

Primero notemos que a_{10} será el elemento más grande en cualquier subconjunto de 7 que lo contenga;a_9 será el elemento más grande en cualquier subconjunto de 7 que lo contenga y no contenga a_{10}; a_8 será el elemento más grande en cualquier subconjunto de 7 que lo contenga y no contenga a a_{10} ni a a_9; a_7 será el elemento más grande en cualquier subconjunto de 7 que lo contenga y no contenga a a_{10}, a_9 y a_8; a_6 ya no puede ser el elemento más grande ya que si lo fuera solo agarraríamos un subconjunto de 6 o menos elementos. La cantidad de subconjuntos que contienen a a_{10}, a_9, a_8, a_7 son $\binom{9}{6}$, $\binom{8}{6}$, $\binom{7}{6}$ y $\binom{6}{6}$, respectivamente. Así, el peso de A (denotémolos por $\$A$) es $\$A = a_{10}\binom{9}{6} + a_9\binom{8}{6} + a_8\binom{7}{6} + a_7\binom{6}{6}$. Para maximizar a $\$A$ basta tomar a_{10}=100, $a_9 = 99$, $a_8 = 98$ y $a_7 = 97$. Y para minimizar $\$A$ elegimos $a_1$0=10, $a_9 = 9$, $a_8 = 8$ y $a_7 = 7$.

Así Max $\$A = 100\binom{9}{6} + 99\binom{8}{6} + 98\binom{7}{6} + 97\binom{6}{6}$

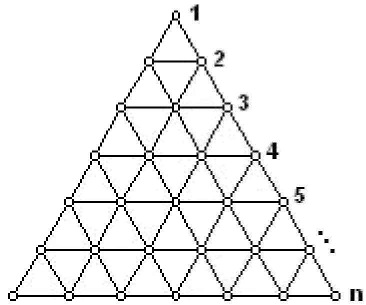
Min $\$A = 10\binom{9}{6} + 9\binom{8}{6} + 8\binom{7}{6} + 7\binom{6}{6}$.

Note que en esta solución no importó cuánto es la cantidad de subconjunto que contienen a algún a_i, ya que se factoriza al restar Max$\$ -$ Min$\$$.

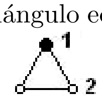
Entonces Max $\$A$ - Min $\$A$ $=90\left(\binom{9}{6} + \binom{8}{6} + \binom{7}{6} + \binom{6}{6}\right)$ que claramente es divisible por 90. $\square$

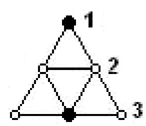
Segundo día
8 de mayo de 2004

Problema 5
Se desea rellenar los puntos de la siguiente figura con dos colores.

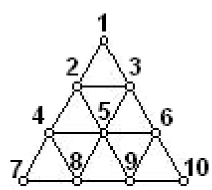


¿Para cuáles valores de n se tiene que, sin importar cómo se rellenen los puntos, siempre hay al menos un triángulo equilátero con sus vértices del mismo color? Las líneas no necesariamente son los lados del triángulo.

Solución
Usemos los colores negro y blanco. Para n=1 no hay triángulo equilátero. Con n=2 esta coloración no hay un triángulo con los vértices del mismo color:  . n=3 también tiene al menos un contraejemplo:



Demostremos que a partir de $n = 4$ no se puede evitar que haya un triángulo equilátero con los tres vértices del mismo color. Enumeremos los vértices del 1 al 10 como sigue:



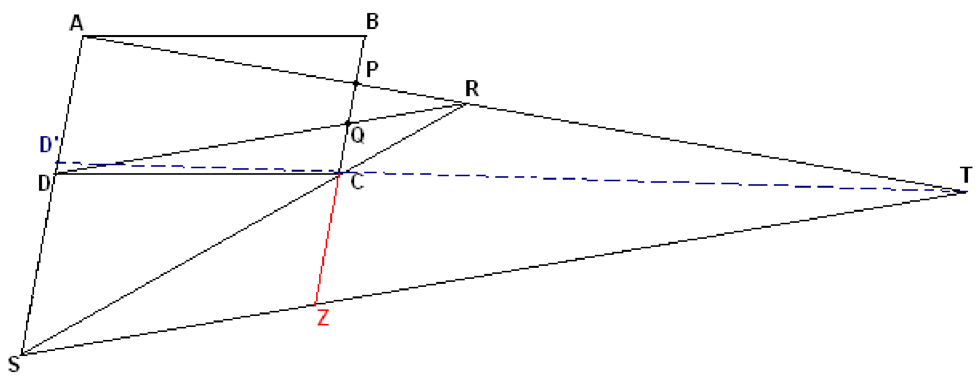
Ahora fijémonos en el hexágono formado por los puntos 2,3,4,6,8 y 9. Sin pérdida de generalidad supongamos que el vértice 5 lo pinto de negro. Si los vértices del hexágono son del mismo color se forman varios triángulos equiláteros (y con esto es cierto lo que dice el problema; la idea de esta prueba es tratar de evitar que se formen los triángulos equiláteros con vértices del mismo color, pero si no podemos evitarlo ya acabaríamos con la prueba) , por lo tanto los vértices del hexágono deben pintarse de los dos colores; supongamos que el vértice 3 lo pinto de negro, entonces el vértice 2 y 6 deben pintarse de blanco, y el 8 debe pintarse de negro (ya que si fuera blanco se formaría un triángulo con los vértices 2 y 6), entonces el 9 debe pintarse de blanco. Ahora fijémonos en el vértice 10, éste por una parte si lo pintamos de negro ya se formaría el triángulo junto con los vértices 3 y 8; ahora si lo pintamos de blanco se formaría el triángulo con los vértices 6 y 9; pero como hay que pintarlo de algun color (blanco o negro) entonces siempre hay al menos un triángulo equilátero con los vértices del mismo color para n=4. Entonces para $n \geq 4$ siempre habrá un triángulo equilátero con los vértices del mismo color, ya que por ejemplo si queremos demostrarlo para $n = 10$ tomamos las primeras 4 filas y hacemos la misma prueba. Por lo tanto sólo se forma siempre el triángulo con los vértices del mismo color para $n \geq 4$. $\square$

Problema 6
Demuestre que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004} = \frac{1}{1003} + \frac{1}{1004} + \cdots + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2004}$$

Solución
Separemos los elementos positivos y negativos de la primera expresión: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2003}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)$
Ahora sumemos y restemos $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2004}$ para no alterar la suma pues únicamente le estamos sumando cero.
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}=\left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2003}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)\right]-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1002}\right)=\frac{1}{1003}+\frac{1}{1004}+\cdots+\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}$ □

Problema 7
Sea $ABCD$ un paralelogramo con AB paralelo a DC. Sean P y Q dos puntos en el lado BC tales que $BP=PQ=QC$, con $P\neq C$. Prolonga los segmentos AP y DQ hasta que se corten en un punto y llámale R. Ahora prolonga AD y RC hasta que se corten en un punto y llámale S. Si T es el punto de intersección de la prolongación del segmento AR con la recta paralela a DQ que pasa por S, demuestra que D, C y T están sobre una misma recta.
Solución
Trácese la prolongación del lado BC hasta que tope con ST y llámele Z a este punto. O sea así:



Ahora fíjese en el triángulo RAS y en el triángulo RPC, ambos tienen a la recta RD que los atravieza. Como $\triangle RPQ$ es semejante al $\triangle RAD$ entonces $\frac{RQ}{RD}=\frac{QP}{DA}$ y como $\triangle RQC$ es semajante al $\triangle RDS$ entonces $\frac{RQ}{RD}=\frac{QC}{DS}$, luego de estas dos igualdades tenemos que $\frac{QP}{DA}=\frac{QC}{DS}$ pero como $QP=QC$ entonces $DA=DS$. Sea $x=BP=PQ=QC$, observe que $DQZS$ y $ABCD$ son paralelogramos, entonces $QZ=DS$ y $DA=CB$, luego como $DS=DA$ entonces $QZ=CB=3x$; entonces $CZ=QZ-QC=3x-x=2x=PC$ por lo tanto C es punto medio de PZ. Obsérvese al $\triangle TAS$, PZ es una recta que es paralela a AS y además los puntos medios son C y D respectivamente; imagine una recta que pase por TC y atravieza a AS en un punto D' (recta punteada) de forma que $D'\neq D$ (todavía no sabemos que son colineales T,C y D), luego haciendo una prueba análoga a cuando demostramos que $DA=DS$, podemos demostrar que $D'A=D'S$, entonces tenemos sobre el mismo segmento AS a dos puntos medios D y D', pero esto sería una contradicción a menos que D sea igual a D'; entonces D' tiene que ser D. Y como construimos a D' de forma que sí sea colineal a T y a C, y acabamos de probar que $D=D'$, entonces D, C y T están sobre una misma recta. □

Problema 8
Los candidatos para alcalde de Villa Chica son Clark, Chloe, Lana y Lex, y quieren acomodar su propaganda electoral en los ochenta postes que están en medio de la avenida principal de la villa con las condiciones siguientes:

a) En cada poste solamente se puede colocar una propaganda.

b) No pueden estar dos propagandas de un mismo candidato en postes consecutivos.

¿De cuántas maneras posibles se pueden acomodar las propagandas en el caso en que todos los candidatos tengan más de 40 propagandas y todos cumplan con las dos condiciones?
¿Y de cuántas maneras posibles se pueden acomodar en el caso en que cada candidato tiene 20 propagandas y sólo Clark cumple con las dos condiciones, mientras que los demás candidatos solamente cumplen con la condición a)?

Solución

Primera pregunta: como todos los 4 candidatos tienen más de 40 propagandas, entonces las formas de acomodar la propaganda en el primer poste son de 4 maneras, la del segundo son 3 maneras (ya que si alguien ya colocó su propaganda en el primer poste, no puede hacerlo en el segundo), la del tercero igual son de 3 formas, y así sucesivamente en los postes siguientes son de 3 formas, por tanto la cantidad total de formas son $4 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot 3}_{39 veces} = 4 \cdot 3^{39}$.

Segunda pregunta: como las propagandas de Clark son las que no pueden estar juntas coloquémoslas primero de la siguiente forma: imagine que tiene 61 postes, ahora coloque como sea las 20 propagandas de Clark; esto se puede hacer de $\binom{61}{20}$ maneras posibles; a partir de aquí añada un poste entre cada dos postes que tengan propaganda de Clark; entonces se van a añadir en total 19 postes, para hacer un total de 80 postes. Fíjese que al colocar los 19 postes estamos forzando a que la propaganda de Clark esté separada por al menos un poste. Ahora de los 60 que faltan ya solo faltan acomodar las propagandas restantes; empecemos con Chloe: hay 20 propagandas para colocar en 60 postes, esto se hace de $\binom{60}{20}$ formas; ahora con Lana: faltan 40 postes para colocarles 20 propagandas y se hace en $\binom{40}{20}$ formas; y Lex ya solo puede colocarlas de $\binom{20}{20} = 1$ formas. Por lo tanto se puede hacer esto de: $\binom{61}{20} \cdot \binom{60}{20} \cdot \binom{40}{20} \cdot \binom{20}{20}$ formas posibles. $\square$